ממן 11

שאלה 1

הרעיון הכללי של האלגוריתם –

נשתמש באלגוריתם G-S כאשר גברים = ספינות, נמלים = נשים. נשים לב כי מס' הנמלים = מס' הספינות, בסוף ריצת האלגוריתם כל ספינה משוייכת לנמל שלה ולא ייתכן ששתי ספינות יהיו באותו נמל, כנדרש באלגוריתם .G-S הספינות יעדיפו נמלים לפי הלו"ז שלהן (ז"א אם ספינה 1 מבקרת בנמל א לפני נמל ב עפ"י הלוז שלה, נאמר כי היא תעדיף את נמל א על נמל ב). הנמלים יעדיפו ספינות בסדר הפוך (ז"א נמל א יעדיף את הספינות מהאחרונה לראשונה שמבקרות בו). נסמן ספינות ב-b ונמלים ב-h. בסיום הרצת האלגוריתם יתקיים הנדרש בשאלה.

תיאור האלגוריתם -

בניית רשימת ההעדפות של כל צד – העדפות הספינות : יהיו n מס’ הספינות, m מס' הימים בחודש. עבור כל ספינה, נעבור בלולאה על הלו"ז שלה מ-1 עד m. לבניית רשימת ההעדפות שלה, נציב את הנמל הראשון שהיא מתכננת לבקר בו ראשון, את הנמל השני כשני וכו'. העדפות הנמלים : נעבור בלולאה בסדר יורד מ-m עד 1 (ימים). נעבור בלולאה נוספת בסדר יורד מ-n עד 1 (ספינות). עבור כל יום, נבדוק האם קיימת ספינה כלשהי b העוגנת בנמל h כלשהו באותו יום. אם כן נוסיף לרשימת ההעדפות של נמל h את הספינה b (במבנה נתונים רשימה, כך שהספינה הבאה בתור תהיה בעדיפות שניה וכו'). אחרת נמשיך הלאה ליום הבא.

יצירת הזיווגים –

כעת נריץ את אלגוריתם G-S כאשר כקלט רשימת ההעדפות של הספינות והנמלים. כל עוד קיימת ספינה "פנויה" b (שלא משוייכת לנמל), הספינה תציע נישואין לנמל המועדף עליה. הנמל יתנהג בהתאם (אם הוא פנוי יסכים, אחרת יבדוק עדיפות לספינה יותר "טובה" בדיוק כמו באלגוריתם המקורי). התהליך ימשיך עד שכל הספינות משוייכות לנמל. בסיום – כל הספינות עוגנות בנמלים לפי דרישות השאלה. למימוש האלגוריתם ניעזר בסעיף 2.3 לקבלת זמן הריצה האופטימלי.

הוכחת נכונות –

* האלגוריתם עוצר (ברור מנתוני השאלה, כמות הספינות והנמלים סופית, בניית ההעדפות מורכבת מלולאה כפולה סופית וכן אלגוריתם G-S עוצר על קלט סופי).
* מתקיימים תנאי אלגוריתם G-S :
  + מס' הספינות = מס הנמלים
  + כל ספינה מעדיפה כל נמל בדיוק פעם אחת וההיפך – עפ"י הנתונים כל ספינה עוגנת בכל נמל פעם אחת וכן כפי שבנינו את רשימת ההעדפות של הנמלים, כל נמל מעדיף כל ספינה פעם אחת.
  + לא ייתכן מצב שבו שתי ספינות עוגנות באותו נמל באותו יום : אם ספינה משודכת לנמל ולאחר מכן תגיע ספינה לאותו נמל , ז"א שהספינה מעדיפה את נמל לפני שהספינה מעדיפה את נמל ← ז"א שהנמל מעדיף את הספינה שהגיעה אליו אחרונה, - הספינה - בסתירה לתוצאת אלגוריתם G-S אשר ידוע כי הוא נכון. לכן אין שתי ספינות באותו נמל באותו יום.

ניתוח סיבוכיות –

* בניית רשימת ההעדפות של כל צד – מבוצעת ע"י לולאה כפולה
* שימוש באלגוריתם G-S עם הקלטים שבנינו -
* זמן הריצה הכולל הוא + וכן נתון כי m>n לכן

שאלה 2

הרעיון הכללי של האלגוריתם – האלגוריתם יחזיר תשובה חיובית רק במידה וקיים בגרף הנתון מעגל. (לפחות אחד). לכן נניח כי הגרף קשיר. במידה ולא, ניתן להפעיל את האלגוריתם על כל רכיב קשירות בנפרד.

תיאור האלגוריתם – נבחר צומת כלשהו ונריץ DFS ממנו. בעץ הסריקה המתקבל, ייתכנו 2 סוגי קשתות : קשתות עץ או קשתות אחורה. אם התקבלו רק קשתות עץ, נחזיר "לא" ונסיים. אחרת (יש מעגל בגרף), נבחר קשת אחורה כלשהי, נניח המחברת את קודקודים u,v ונכוונה e=(u,v). כעת נריץ BFS על קודקוד v ונקבל חלוקה לרמות. נכוון כל קשת מרמה i לרמה i+1 שעדיין אינה מכוונת (כל צומת מרמת i לצומת ברמה i+1).

הוכחת נכונות – האלגוריתם יעצור תמיד (יש מס' סופי של צמתים ). כ"כ דרגת הכניסה של צומת v היא 1 (כך נבנתה הקשת e) וכן אחרי הרצת BFS יש קשת שיוצאת מכל רמת i לרמה i+1 ז"א לכל צומת יש לפחות קשת אחת שנכנסת אליו.

ניתוח סיבוכיות - DFS + BFS - , למציאת רכיבי קשירויות אין השפעה על הסיבוכיות (עוד BFS או DFS).

שאלה 3

הרעיון הכללי של האלגוריתם – נבנה גרף מכוון המייצג את הנוסחה בצורה הבאה. נשים לב כי כל ביטוי מהצורה ניתן לתרגום לביטוי . נבנה את הגרף המכוון G כך : לכל ליטרל ולמשלים שלו נצייר קודקוד. כאמור מכל פסוקית קיבלנו שני ביטויים, נייצג אותם בגרף ע"י קשת מכוונת מתאימה. עבור כל קודקוד V נבדוק האם יש מסלול ממנו אל וגם ההיפך (מ אל V). אם כן, אין השמה מספקת בגרף. אחרת , קיימת השמה זו ונוכל למצוא אותה ע"י הצבת ערכי אמת מתאימים לכל הקודקודים בדרך.

עבור כל קודקוד V בגרף שהתקבל, נריץ עליו DFS . אם במהלך הסריקה נמצא נחזיר תשובה שלילית (במצב זה נקבל סתירה כי לא ייתכן ש ולא נוכל למצוא השמה מספקת). אחרת

תיאור האלגוריתם – נתרגם כל פסוקית בנוסחה לביטוי השקול

* לכל ליטרל ולמשלים שלו נייצג קודקוד ונחבר ביניהם קשת עפ"י הקשר מסעיף קודם. למשל עבור תהיה קשת מכוונת בין ל .
* עבור כל קודקוד v ללא השמה :
  + בצע חיפוש DFS בגרף ממנו.
  + אם במהלך החיפוש לא נמצא , הצב ערך T לכל ליטרל וערך F לכל ליטרל עם שלילה שנמצאו בתהליך החיפוש
  + אחרת (בשלב זה נמצא ) הרץ חיפוש DFS מהקודקוד .
    - אם במהלך החיפוש לא נמצא V , הצב ערך T לכל ליטרל וערך F לכל ליטרל עם שלילה שנמצאו בתהליך החיפוש
  + אחרת (יש סתירה בנוסחה) החזר תשובה שלילית

הוכחת נכונות – ברור כי האלגוריתם עוצר (יש מס' סופי של קודקודים ). כ"כ הזהויות הלוגיות נכונות ע"פ כללים ידועים של הלוגיקה. הרצת DFS על צומת מאפשרת לנו למצוא רכיבי קשירות בגרף. אם במהלך החיפוש נמצא ליטרל והנגדי שלו וגם המסלול ההפוך, הרי לא ייתכן שנמצא השמה מספקת כי באותו רכיב קשירות יימצא גם V וגם המשלים. אחרת, בכל איטרציה של הלולאה ניתן ערך אמת מתאים לליטרל מה שיוביל להשמה מספקת בסוף האלגוריתם (מכיוון ששלנו את האפשרות של סתירה).

ניתוח סיבוכיות - תרגום הפסוקיות (m) בעלות 2 משנים כל אחת לביטויים עם קשר גרירה :. 𝑂(2𝑚)=O(m) בניית הגרף - הרצת אלגוריתם החיפוש - ולסיכום סיבוכיות זמן הריצה של האלגוריתם הינה

שאלה 4

לא הצלחתי לפתור